

27/3/17

Έχουμε δει ότι

Μοντέλο $\mathbb{R}^3$

Σημεία: (x, y, z)

(κλάση επιπέδων, κλάση ευθειών)

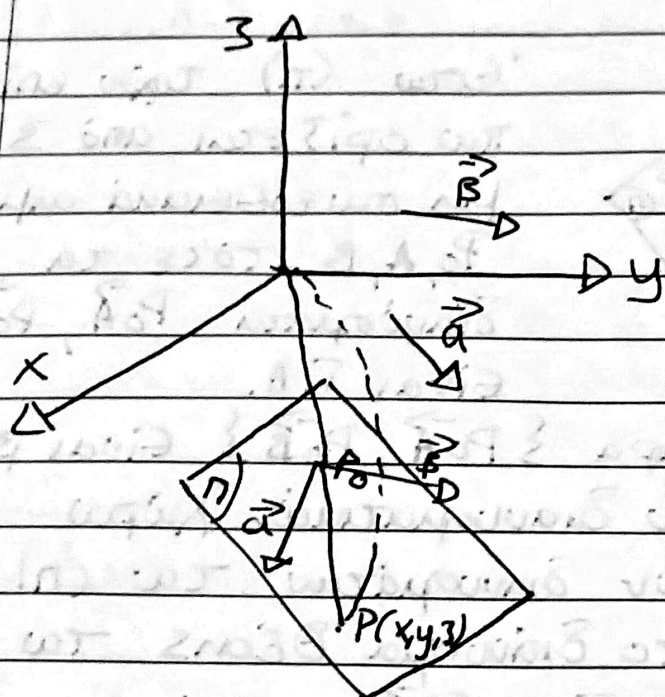
Επίπεδα: Διαυσιματισμοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$

Διότασης 2 παράλληλη μεταφορά

Π.χ παράμ. με.

$$V \subset \mathbb{R}^3 \dim V = 2 \quad T(V) \subset \mathbb{R}^3$$

$$T(x, y, z) = (x, y, z) + (\alpha, \beta, \gamma)$$



Έστω επίπεδο (π) και $P_0(x_0, y_0, z_0) \in (\pi)$
και $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \notin \{0\}$ διανύσματα $\parallel (\pi)$

Έστω $P(x, y, z)$ τυχόν σημείο του (π)
με διάνυσμα θέσης $\vec{OP}$

$$\vec{OP} = \vec{OP}_0 + \vec{P_0P}, \quad \vec{P_0P} = \lambda \vec{\alpha} + \mu \vec{\beta}$$

$$\vec{OP} = \vec{OP}_0 + \lambda \vec{\alpha} + \mu \vec{\beta}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \hookrightarrow \text{Διαν. εξφ.}$$

Ισοδύναμες εξισώσεις (των επιπέδων).

- 1) Διανυσματική εξίσωση του επιπέδου (π)
 που διέρχεται από το σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ με
 διάνυσμα θέσης $\vec{x}_0 = \vec{OP}_0$ και διανύσματα
 $\vec{a}, \vec{\beta} \parallel (π)$ και γ.ρ. ανεξ.
 (1) $\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda \vec{a} + \mu \vec{\beta}$, $\vec{x} = \vec{OP} =$ διάνυσμα θέσης του
 τυχόντα σημείου $P \in (π)$.

- 2) Παραμετρικές εξισώσεις του (π)
 $P(x, y, z)$ $\vec{x} = \vec{OP} = (x, y, z)$, $\vec{x}_0 = \vec{OP}_0 = (x_0, y_0, z_0)$
 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$
 (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + \lambda a_1 + \mu \beta_1 \\ y = y_0 + \lambda a_2 + \mu \beta_2 \\ z = z_0 + \lambda a_3 + \mu \beta_3 \end{cases}$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (λ, μ καλούνται παράμετροι)

- 3) Αναλυτική εξίσωση του (π)

$$\vec{a} \times \vec{\beta} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

αφ' ου ειδόν $\vec{a}, \vec{\beta}$ γ.ρ. ανεξ. έχω $\vec{a} \times \vec{\beta} \neq \vec{0}$. Έστω $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0$

$$\begin{cases} \lambda a_1 + \mu \beta_1 = x - x_0 \\ \lambda a_2 + \mu \beta_2 = y - y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{(y - y_0) \beta_2}{\begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 \\ a_2 & \beta_2 \end{vmatrix}}, \mu = \frac{a_1 (y - y_0) - a_2 (x - x_0)}{\begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 \\ a_2 & \beta_2 \end{vmatrix}} \end{cases}$$

$$z = z_0 + \lambda a_3 + \mu \beta_3 \Leftrightarrow z = z_0 + a_3 \frac{\beta_2 (x - x_0) - \beta_1 (y - y_0)}{\begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 \\ a_2 & \beta_2 \end{vmatrix}} + \beta_3 \frac{a_1 (y - y_0) - a_2 (x - x_0)}{\begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 \\ a_2 & \beta_2 \end{vmatrix}}$$

$$\Leftrightarrow Ax + By + Cz + D = 0$$

$\uparrow$ αναλ. εξ.

Πρόταση: Τα σημεία της επιμέτρης (n) παράγονται από $Ax + By + Cz + D = 0$ με $C(A, B, C) \neq 0$ (αυτά είναι)

Αντίστροφα: Το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης της μορφής (*) είναι επιμέτρο.

Απόδειξη: (Αντίστροφο)

Έστω $P(x, y, z)$ σημείο τέτοιο ώστε $Ax + By + Cz + D = 0$

Έστω $A \neq 0$, τότε έχω $x = -\frac{By}{A} - \frac{Cz}{A} - \frac{D}{A}$

$$\vec{a} = O\vec{P} = (x, y, z) = \left(-\frac{By}{A} - \frac{Cz}{A} - \frac{D}{A}, y, z \right) =$$

$$= \underbrace{\left(-\frac{D}{A}, 0, 0 \right)}_{x_0} + \left(-\frac{By}{A}, -\frac{Cz}{A}, y, z \right) = x_0 + \left(-\frac{B}{A}y, y, 0 \right) +$$

$$+ \left(-\frac{C}{A}z, 0, z \right)$$

Αρα $O\vec{P} = x_0 + y\vec{a} + z\vec{b}$ όπου $\vec{a} = \left(-\frac{B}{A}, 1, 0 \right), \vec{b} = \left(-\frac{C}{A}, 0, 1 \right)$

α. έργο.

με $\vec{a}, \vec{b} \perp \vec{c}$

Παρατήρηση: Κάθε τριάντα επιμέτρης της αυθ. έργο.

$$\vec{x} = x_0 + \vec{a}\alpha + \vec{b}\beta \Leftrightarrow \vec{x} - x_0 = \vec{a}\alpha + \vec{b}\beta \Rightarrow$$

$$\{ \vec{x} - x_0, \vec{a}, \vec{b} \} \text{ είναι l.f.e. } (\Leftrightarrow)$$

$$\Leftrightarrow [\vec{x} - x_0, \vec{a}, \vec{b}] = 0 \text{ α.μ.τ.}$$

$\Leftrightarrow$	$x - x_0$	$y - y_0$	$z - z_0$		αυθ. έργο
	α_1	α_2	α_3		$= 0$ εξίσωση
	β_1	β_2	β_3		

* Παράδειγμα: (είναι αναγκαία επιμέλεια)

Να βρεθούν όλες οι εξισώσεις του επιπέδου (η) το οποίο διέρχεται από το σημείο $P_0(2, 3, 0)$ και είναι παράλληλο προς τα διανύσματα $\vec{\alpha}(2, 2, 2)$ και $\vec{\beta}(2, -2, 2)$ (ήπότε να έχω ένα σημείο και 2 διανύσματα και πότε να δω να είναι Γ.Α.

Λύση:

ήφ. ανεξάρτητα

Εσέγω αν είναι ~~παράλληλα~~ (είτε νοστάλικο δόγος ή
Εξ. διωόμενα).

$$\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (2, 0, -2) \neq (0, 0, 0) \Rightarrow \vec{\alpha}, \vec{\beta} \text{ είναι Γ.Α.}$$

Διανυσματική εξίσωση: $\vec{X} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \Leftrightarrow (x, y, z) = (2, 3, 4) + \lambda(2, 2, 2) + \mu(2, -2, 2)$

Παραμετρικές εξισώσεις:
$$\begin{cases} x = 2 + \lambda + \mu \\ y = 3 + \lambda - \mu \\ z = 2 + \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Αντικαθιστώντας: $x = 2 + z \Leftrightarrow 2x + 0y - 2z - 2 = 0$

$x-2$	$y-3$	z	
2	2	2	=0
2	-2	2	

Εξισώσεις επιπέδου

Εξισ. επιπ.: Διαφορετικές εξισωσ., παραμετρική εξισωσ., αναδυσική εξισωσ. (Τις είδαμε όταν καθορίζεται από ένα σημείο και $\vec{n}$ δίου (Γ.Α.).

• Τρόποι καθορισμού επιπέδου (η)

1) Δίνεται σημείο P_0 του (η) και $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ γραμ. ανεξ. // (η)

Ανάλ. εξ. $Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \text{Διων. εξ. } \vec{x} = x_0\vec{\alpha} + y_0\vec{\beta} \\ \text{Παραμ. εξ. } \begin{cases} x = x_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 s \\ y = y_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 s \\ z = z_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 s \end{cases} \end{cases}$$

$x - x_0$	$y - y_0$	$z - z_0$	$= 0$
α_1	α_2	α_3	
β_1	β_2	β_3	

2) Δίνονται 2 σημεία $P_0(x_0, y_0, z_0), P_1(x_1, y_1, z_1)$ και $\vec{a} \neq \vec{a}' // \eta$ αλλά όχι συγγραμμά με το $P_0 P_1$

Ανάγεται στην 1) με $\vec{\beta} = P_0 P_1$

$$\vec{\alpha} = \frac{P_1 - P_0}{\|P_1 - P_0\|}$$

3) Δίνονται 3 σημεία $P_0(x_0, y_0, z_0), P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ του (η) τα οποία ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΕΥΘΕΙΑΚΑ
Ανάγεται στην 1) περίπτωση με $\vec{\alpha} = P_0 P_1, \vec{\beta} = P_0 P_2$

Μετράει το μήκος το διανυσματά και να σημειώ
 ή από ένα να τα ε επίδες (3) 3 μ. αντιστοιχεί

Παραδείγματα: Να βρεθούν οι διαιρέτες εξωτερικά
 του επιμέρους που διέπεται από τα σημεία
 $P_0(2,0,0)$, $P_1(0,2,0)$, $P_2(0,0,2)$.

Λύση: $\vec{\alpha} = P_0 P_1 = (-2, 2, 0)$, $\vec{\beta} = P_0 P_2 = (-2, 0, 2)$

$$\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2, 2, 2) \neq (0,0,0)$$

$\Rightarrow \vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι Σ.Α (ή ισόδυναμα P_0, P_1, P_2 ή αντιστρέφεται

Διαν. $\vec{x}$: $\vec{x} = x\vec{\alpha} + y\vec{\beta} \Leftrightarrow (x, y, z) = (2, 0, 0) + x(-2, 2, 0) + y(-2, 0, 2)$
 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Παραμ. $\in \mathbb{R}$:

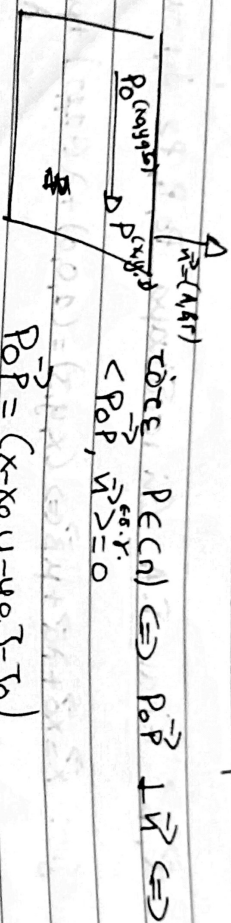
$$\begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Αναλ. $\in \mathbb{R}$: (κάνει αναγωγή των παραμέτρων) (θα πρέπει να
 $x = 1 - y - z \Leftrightarrow \boxed{x + y + z = 1}$ φ σημεία να
 $\in \mathbb{R}$ επιμέρους των

$$\begin{bmatrix} \vec{x} - \vec{x}_0, \vec{\alpha}, \vec{\beta} \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ x-1 & y-0 & z-0 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}$$

Ορισμός: Το διάνυσμα $\vec{n}$ καλείται νόρμος στο επίπεδο CN αν υ ο γράβει ενός ορθογώνιου του είναι ευθεία κάθετη στο CN .

Για Ορισμός επιπλέον CN από ένα σημείο του $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και ενός καθετού διανυσματος $\vec{n} \neq \vec{0}$



$$\vec{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$\vec{n} = (A, B, \Gamma)$$

$$\Leftrightarrow P \in \text{CN} \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + \Gamma(z - z_0) = 0$$

$$\text{Βρίσκουμε τον συν. εξίσωσης} \quad Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0, \text{ όπου } \Delta = -Ax_0 - By_0 - \Gamma z_0$$

Αντιστροφή: Έστω επίπεδο με συνιστώσες $\vec{n}$.

$$\therefore Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$$

$$(A, B, \Gamma) \neq (0, 0, 0)$$

Έστω $P_0(x_0, y_0, z_0)$ σημείο του CN και $P(x, y, z)$ τυχόν σημείο του CN

$$\begin{cases} Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0 \\ Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0 + \Delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + \Gamma(z - z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \angle(A, B, \Gamma), \vec{P_0P} = 0 \quad \forall P \in \text{CN}$$

$$\Leftrightarrow \vec{n} = (A, B, \Gamma) \text{ είναι κάθετο στο } \text{CN}$$

Άσκηση: Να ~~βρεθεί~~ βρεθούν διανύσματα $\in$ π που είναι κάθετα στο π και $\vec{r} = (1, -2, -2)$.

Λύση: Έστω (x, y, z) τυχαίο σημείο του π
 $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \vec{r} = (x+1, y-2, z-3) \cdot (1, -2, -2) = 0$

$$\Leftrightarrow 1(x+1) - 2(y-2) - 2(z-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+1-y-2z+4+6=0 \Leftrightarrow$$

$$x-y-2z+9=0$$

Διασώζονται συντεταγμένες $(1, -2, -2)$.

$$\vec{x} = 0\vec{r} = (x, y, z) = (y+2z-9, y, z)$$

$$\text{Διασώζονται } \vec{r} = (-9, 0, 0) + y(1, 1, 0) + z(2, 0, 1)$$

Πρέπει $\vec{a}, \vec{b}$ να είναι Γ.Α.

$\vec{a}, \vec{b} =$	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$	
	1	1	0	$= (1, -1, -2)$
	2	0	1	όρα είναι Γ.Α

Παραμετρικές:

$$\begin{cases} x = -9 + \lambda + 2\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

$$\text{Διασώζονται } (-9, 0, 0) + y(1, 1, 0) + z(2, 0, 1)$$

Παρατηρήσεις:

1) $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \parallel (\pi) \Rightarrow \vec{\alpha} \times \vec{\beta} \perp (\pi)$

2) $(\pi): Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0, (A, B, \Gamma) \neq (0, 0, 0)$
 $\vec{n} = (A, B, \Gamma) \perp (\pi)$

Μελέτη σχέσεων θέσεων 2 επιπέδων:

Δίνονται τα επίπεδα.

$(\pi_1): A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1 = 0$

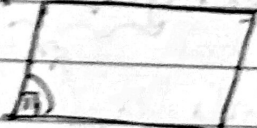
$(\pi_2): A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2 = 0$

$(A_1, B_1, \Gamma_1) \neq (0, 0, 0) \neq (A_2, B_2, \Gamma_2)$

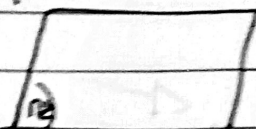
$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, \Gamma_1) \perp (\pi_1)$

$\vec{n}_2 = (A_2, B_2, \Gamma_2) \perp (\pi_2)$

$\vec{n}_1$



$\vec{n}_2$



Αν παράλληλα
(αντίλογος αντεπαρρύψι)
~~παραλληλότητα~~

Συμπέρασμα: $\vec{n}_1, \vec{n}_2 \text{ γ. ε} \Leftrightarrow (\pi_1) = (\pi_2) \vee (\pi_1) \parallel (\pi_2)$

$\vec{n}_1, \vec{n}_2 \text{ γ. ε} \Leftrightarrow \begin{matrix} A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_1 & B_1 & \Gamma_1 \end{matrix} = \begin{matrix} \lambda A_1 & \lambda B_1 & \lambda \Gamma_1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} A_2 = \lambda A_1 \\ B_2 = \lambda B_1 \\ \Gamma_2 = \lambda \Gamma_1 \end{cases}$

αν παρ. αντίλογος

αν ταυίζονται

$\begin{cases} (\pi_2) \lambda A_1x + \lambda B_1y + \lambda \Gamma_1z + \Delta_2 = 0 \\ \Leftrightarrow A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \frac{\Delta_2}{\lambda} = 0 \end{cases}$

Αν $\vec{n}_1, \vec{n}_2 \text{ γ. ε}$ τότε $(\pi_1) = (\pi_2) \Leftrightarrow \frac{\Delta_2}{\lambda} = \Delta_1 \Leftrightarrow \Delta_2 = \lambda \Delta_1$

$$\text{Συμπέρασμα } \alpha(\pi_1) \equiv (\pi_2) \Leftrightarrow \frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$$

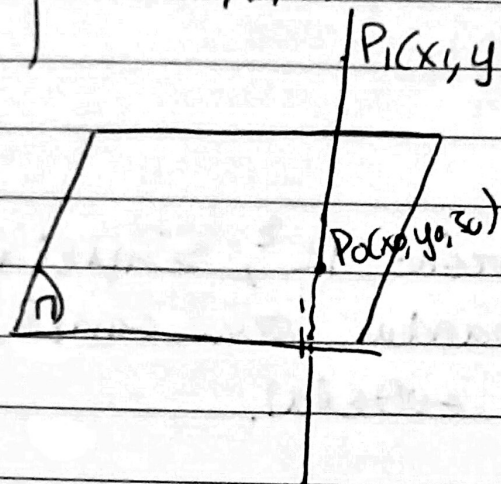
$$\beta) (\pi_1) \parallel (\pi_2) \Leftrightarrow \frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \text{ α σταθεράς}$$

$$\gamma) (\pi_1), (\pi_2) \text{ τέμνονται} \Leftrightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq \vec{0} \Leftrightarrow \vec{n}_1, \vec{n}_2 \text{ Γ.Α.}$$

$$\delta) (\pi_1) \perp (\pi_2) \Leftrightarrow \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = 0$$

Ημίχωροι

Δίνεται επίπεδο (π) $Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$, $(A, B, \Gamma) \neq 0$
 $\vec{n} = (A, B, \Gamma)$



$P_1(x_1, y_1, z_1) \notin (\pi)$ $\vec{n} \perp (\pi)$. Είναι $P_0(x_0, y_0, z_0)$ το σημείο της ευθείας που περνάει από το P_1 προς το (π)

άρα $Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0 + \Delta = 0$ (επειδή ταίρια με επίπεδο)

$$\begin{aligned} & \vec{P_0P_1} \perp (\pi) \text{ και } \vec{n} \perp (\pi) \Rightarrow \\ & \vec{P_0P_1} \parallel \vec{n} \Rightarrow \vec{P_0P_1} = \lambda \vec{n}, \lambda \neq 0 \\ & \Leftrightarrow (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) = \lambda (A, B, \Gamma) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_0 + \lambda A \\ y_1 = y_0 + \lambda B \\ z_1 = z_0 + \lambda \Gamma \end{cases} *$$

$$\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + \Gamma z_1 + \Delta &= A(x_0 + \lambda A) + B(y_0 + \lambda B) + \Gamma(z_0 + \lambda \Gamma) + \Delta = \\ &= Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0 + \Delta + \lambda(A^2 + B^2 + \Gamma^2) \\ \Rightarrow Ax_1 + By_1 + \Gamma z_1 + \Delta &= \lambda(A^2 + B^2 + \Gamma^2) \end{aligned}$$

Συμπεράσματα:

α) Το σημείο $P_1(x_1, y_1, z_1) \notin (π)$ ανήκει στο
πολύεδρο που δείχνει το $\vec{n} = (A, B, \Gamma) \Leftrightarrow Ax_1 + By_1 + \Gamma z_1 + \Delta \geq 0$
(< 0)

β) Η απόσταση του $P_1(x_1, y_1, z_1)$ από το $(π)$
είναι $d(P_1, (π)) = |P_0 \vec{P}_1|$

$$d(P_1, (π)) = |P_0 \vec{P}_1| = |\lambda \vec{n}| = |\lambda| \sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2} =$$

$$= \frac{|Ax_1 + By_1 + \Gamma z_1 + \Delta|}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}$$

Πρόταση 4: Η απόσταση του σημείου
 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ από το επίπεδο $(π): Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$,
 $(A, B, \Gamma) \neq (0, 0, 0)$: είναι:

$$d(P_1, (π)) = \frac{|Ax_1 + By_1 + \Gamma z_1 + \Delta|}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}$$

* Στην Επιδόμετρία Μοντέλο $\mathbb{R}^2$, Σημεία: (x, y)
Ευθείες: $Ax + By + \Gamma = 0$ (Το παραπάνω στην επιπέδ
είναι απόσταση σημείων από ευθεία).

Ειδική περίπτωση: Θεωρούμε επίπεδα $(π_1) \parallel (π_2)$

$$\begin{aligned} \pi_1: A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1 &= 0 \\ \pi_2: A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2 &= 0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} (π_1) \parallel (π_2) &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \neq \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \end{aligned} \right.$$

$$A_1 (π_1) \parallel (π_2) \Rightarrow d(π_1, π_2) = d(P_1, (π_2))$$

με $P_1(x_1, y_1, z_1) \in (π_1)$